

# Capitolo 2

## Definizione e calcolo delle grandezze ingegneristiche utilizzate nella progettazione a fatica multiassiale

### 2.1. Introduzione

Nella progettazione a fatica di un componente meccanico sollecitato da uno stato di tensione multiassiale le metodologie più moderne di progettazione, sia in  $\sigma$  che in  $\varepsilon$ , utilizzano generalmente un approccio di punto; per eseguire un dimensionamento secondo questa metodologia diventa, allora, necessario individuare un punto O del componente ove si possa avere un innesco di cricca e determinare, in tale punto, le componenti della sollecitazione (o della deformazione) istante per istante allo scorrere della storia di carico.

Si consideri per semplicità un provino cilindrico e si fissi un sistema di riferimento assoluto Oxyz avente l'origine coincidente con il punto O ritenuto pericoloso per la resistenza a fatica (fig. 2.1); si ipotizzi, in più, che il materiale con cui è realizzato il provino possa essere ritenuto omogeneo ed isotropo. Se il provino viene sollecitato da un sistema di forze variabili nel tempo allora in ogni istante  $t$  della storia di carico di durata  $T$  si può definire nel punto O, e in funzione del sistema di riferimento assoluto Oxyz fissato, un tensore degli sforzi istantaneo  $[\sigma(t)]$ :

$$[\sigma(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_z(t) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

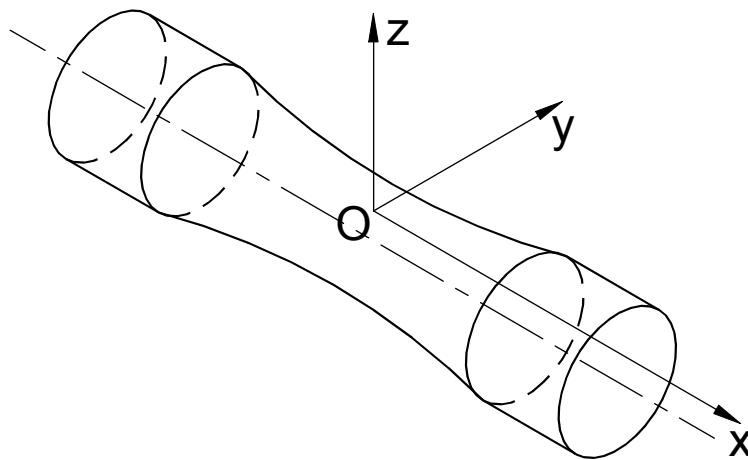
o, analogamente, un tensore delle deformazioni istantaneo  $[\varepsilon(t)]$ :

$$[\varepsilon(t)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(t) & \gamma_{xy}(t) & \gamma_{xz}(t) \\ \gamma_{xy}(t) & \varepsilon_y(t) & \gamma_{yz}(t) \\ \gamma_{xz}(t) & \gamma_{yz}(t) & \varepsilon_z(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

La rappresentazione degli stati di sollecitazione o di deformazione mediante i tensori  $[\sigma(t)]$  o  $[\varepsilon(t)]$  è una rappresentazione molto familiare all'ingegnere progettista, tuttavia è importante ricordare come le componenti che costituiscono i tensori sopra definiti dipendono dall'orientazione del sistema di riferimento assoluto, e, a parità di carico esterno applicato, variando il sistema di riferimento variano anche i valori delle componenti che descrivono tramite le  $\sigma$  e le  $\tau$  (o le  $\varepsilon$  e le  $\gamma$ ) lo stato di sollecitazione (o lo stato di deformazione).

In realtà gli stati tensionali<sup>1</sup> di un corpo omogeneo ed isotropo sollecitato da un carico qualsiasi possono essere rappresentati, in un generico istante, da un unico vettore detto *vettore tensione totale*  $\mathbf{t}(t)$ ; le componenti  $\sigma_x(t)$ ,  $\sigma_y(t)$ ,  $\sigma_z(t)$ ,  $\tau_{xy}(t)$ ,  $\tau_{xz}(t)$ ,  $\tau_{yz}(t)$  che costituiscono il tensore degli sforzi  $[\sigma(t)]$  permettono di definire le componenti del vettore tensione totale  $\mathbf{t}(t)$  rispettivamente ortogonali e parallele ai piani coordinati [1]. Le considerazioni ora brevemente esposte risultano fondamentali, come si vedrà successivamente, per poter eseguire una analisi degli stati tensionali variabili nel tempo e con direzioni principali anch'esse variabili nel tempo.

Nei paragrafi successivi verranno fornite le definizioni che, allo stato attuale dell'arte, vengono utilizzate maggiormente nel campo della fatica multiassiale, con particolare riferimento all'approccio recentemente proposto da Papadopoulos [2, 3].



**Figura 2.1:** Sistema di riferimento assoluto.

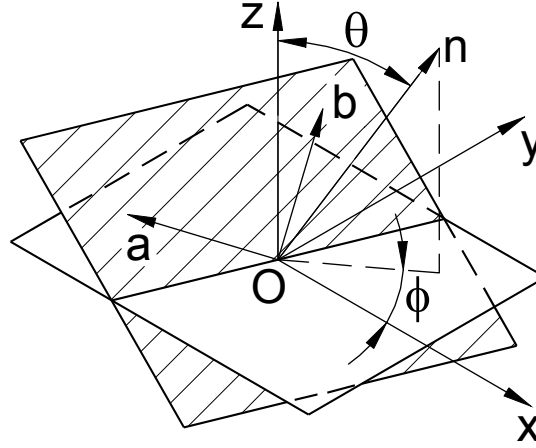
## 2.2. Individuazione di un generico piano nello spazio e grandezze ingegneristiche ad esso associate

Per poter eseguire in modo corretto la verifica di resistenza a fatica è necessario introdurre degli opportuni sistemi di riferimento. Si consideri, per semplicità, un provino cilindrico e si fissi un sistema di riferimento Oxyz avente come origine un punto superficiale O ritenuto pericoloso per il cedimento a fatica (fig. 2.1).

Fissato il sistema di riferimento assoluto, un generico piano  $\Delta$  nello spazio, avente normale  $\mathbf{n}$  e passante per il punto O, può essere individuato a mezzo degli angoli  $\phi$  e  $\theta$  (fig. 2.2): l'angolo  $\phi$  è l'angolo formato dalla proiezione della normale  $\mathbf{n}$  sul piano xy e l'asse delle x, mentre l'angolo  $\theta$  è l'angolo formato dalla normale  $\mathbf{n}$  e l'asse delle z. In base a queste assunzioni gli infiniti piani contenenti il punto O possono essere esplorati facendo variare  $\phi$  tra 0 e  $2\pi$  e  $\theta$  tra 0 e  $\pi$ ; in più su ogni generico piano  $\Delta$  è possibile

<sup>1</sup> Nel seguito si farà riferimento solo al tensore delle sollecitazioni, tuttavia le considerazioni che verranno esposte possono essere trasferite con delle semplici modifiche anche al tensore delle deformazioni.

definire un sistema di riferimento di piano Oabn avente un'asse orientato secondo la normale  $\mathbf{n}$  e gli assi  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  giacenti in  $\Delta$  e tra loro ortogonali [3].



**Figura 2.2:** Sistema di riferimento di piano.

Il vettore  $\mathbf{n}$ , normale al piano  $\Delta$ , abbia, poi, componenti  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$ :

$$\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z), \quad (2.3)$$

componenti che possono essere espresse, ricorrendo a semplici considerazioni trigonometriche, tramite gli angoli  $\phi$  e  $\theta$  precedentemente introdotti:

$$\begin{aligned} n_x &= \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ n_y &= \sin(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ n_z &= \cos(\theta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sulla giacitura  $\Delta$  possono, come detto, essere poi individuate in modo del tutto arbitrario anche due direzioni tra loro ortogonali, direzioni che permettono di definire il sistema di riferimento di piano Oabn:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\equiv (a_x, a_y, a_z), \\ \mathbf{b} &\equiv (b_x, b_y, b_z); \end{aligned} \quad (2.5)$$

anche i versori appena definiti hanno componenti ancora esprimibili in funzione degli angoli  $\phi$  e  $\theta$ . In particolare, assumendo che  $\mathbf{a}$  sia il versore della retta di intersezione tra il piano  $\Delta$  e il piano  $xy$ , si può facilmente ottenere che:

$$\begin{aligned} a_x &= -\sin(\phi) \\ a_y &= \cos(\phi) \\ a_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} b_x &= -\cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ b_y &= -\cos(\theta) \cdot \sin(\phi) \\ b_z &= \sin(\theta). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Per il piano  $\Delta$  in analisi si può ora calcolare la componente di tensione normale e tangenziale in un generico istante, ma per fare ciò occorre determinare prima il valore del vettore tensione totale  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{t}(t) \equiv [t_x(t), t_y(t), t_z(t)], \quad (2.9)$$

le cui componenti possono essere calcolate tramite le seguenti relazioni [1]:

$$\begin{aligned} t_x(t) &= \sigma_x(t) \cdot n_x + \tau_{xy}(t) \cdot n_y + \tau_{xz}(t) \cdot n_z \\ t_y(t) &= \tau_{xy}(t) \cdot n_x + \sigma_y(t) \cdot n_y + \tau_{yz}(t) \cdot n_z \\ t_z(t) &= \tau_{xz}(t) \cdot n_x + \tau_{yz}(t) \cdot n_y + \sigma_z(t) \cdot n_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

Note le componenti del vettore tensione totale  $\mathbf{t}$  è ora possibile calcolare la tensione normale e tangenziale al piano  $\Delta$  in un generico istante, infatti:

$$\sigma_n(t) = t_x(t) \cdot n_x + t_y(t) \cdot n_y + t_z(t) \cdot n_z \quad (2.11)$$

$$\tau_{na}(t) = t_x(t) \cdot a_x + t_y(t) \cdot a_y + t_z(t) \cdot a_z \quad (2.12)$$

$$\tau_{nb}(t) = t_x(t) \cdot b_x + t_y(t) \cdot b_y + t_z(t) \cdot b_z \quad (2.13)$$

$$\tau(t) = \sqrt{\tau_{na}^2(t) + \tau_{nb}^2(t)}. \quad (2.14)$$

Le relazioni ora sviluppate rappresentano la base per la definizione delle grandezze che usualmente vengono utilizzate nella progettazione a fatica, e in particolare per l'applicazione di quei criteri che utilizzano per la verifica il concetto di piano critico.

### 2.3. Rappresentazione schematica di una storia di carico

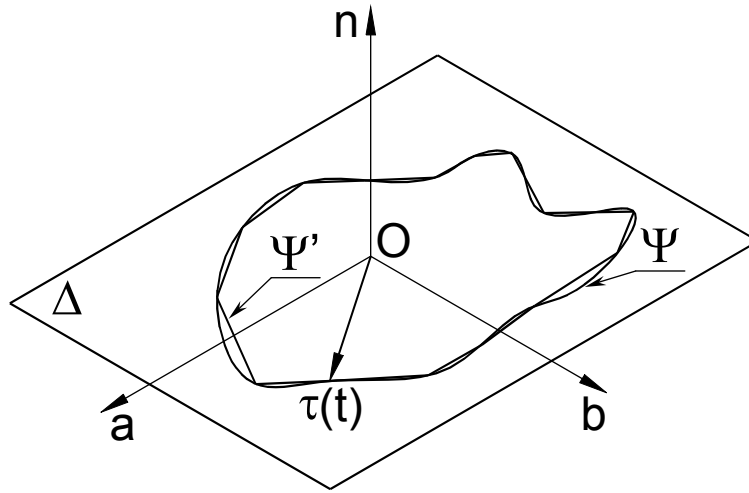
Nella realtà una storia di carico presenta un andamento continuo con dominio e codominio appartenenti all'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ . Quando si devono eseguire delle rilevazioni sperimentali si osserva come la precisione con cui viene descritta la storia di carico dipende dalla capacità di campionamento del sistema di acquisizione dei dati: le storie di carico che vengono rilevate perdono, pertanto, la caratteristica di continuità e sono rappresentate da un insieme discreto di istanti campionati, ovvero una storia di carico acquisita può essere sempre pensata come un insieme finito di stati di sollecitazione statici posti in ordinata successione.

Le considerazioni appena esposte sono fondamentali poiché in seguito la storia di carico verrà sempre schematizzata come un insieme di  $k$  stati di sollecitazione, ovvero le grandezze che verranno di volta in volta calcolate a partire dalla storia di carico verranno trattate come successioni di punti, e non più come funzioni continue, con derivate continue.

### 2.4. Ampiezza e valore medio della tensione tangenziale agente su un piano generico

Si fissi un generico piano  $\Delta$  nello spazio di normale  $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$  e si analizzi il comportamento del vettore tensione tangenziale allo scorrere della storia di carico: il

vertice di tale vettore traccia sul piano  $\Delta$  una curva  $\Psi$  che nel caso di storie periodiche è una curva chiusa, mentre nel caso di storie non periodiche tale curva può essere anche aperta (fig. 2.3).



**Figura 2.3:** Approssimazione tramite la poligonale  $\Psi'$  della curva  $\Psi$  tracciata sul piano  $\Delta$  dalla punta del vettore tensione tangenziale allo scorrere della storia di carico.

La determinazione esatta dell'equazione della curva  $\Psi$  può essere fatta per alcuni casi molto semplici, mentre per storie di carico complesse (come può essere ad esempio una storia random) è possibile descrivere in modo analitico l'andamento di  $\Psi$  solo introducendo delle approssimazioni.

Applicando la metodologia di semplificazione brevemente descritta nel paragrafo precedente è possibile schematizzare la curva  $\Psi$  con una poligonale  $\Psi'$ , a lati rettilinei, avente  $k$  vertici (fig. 2.3). Si può osservare come la soluzione introdotta approssimi in modo tanto più esatto la curva  $\Psi$  quanto maggiore è il numero di punti  $k$  utilizzati per descrivere  $\Psi'$ , infatti, al limite, si ha che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Psi' = \Psi . \quad (2.15)$$

Per definire ampiezza e valore medio della tensione tangenziale si può fare ricorso a diverse definizioni; nella pratica progettuale si fa generalmente riferimento al *metodo della corda*, ampiamente discusso da Lemaitre e Chaboche [5], o al *metodo della proiezione*, sviluppato da Grubisic e Simbürger [6]. Queste due metodologie presentano, come si vedrà nei prossimi paragrafi, l'inconveniente di basarsi su definizioni di ampiezza e valore medio della tensione tangenziale che, in alcuni casi, possono dare origine ad ambiguità, ambiguità che vengono invece superate dal *metodo della più piccola ipersfera* proposto da Papadopoulos [3].

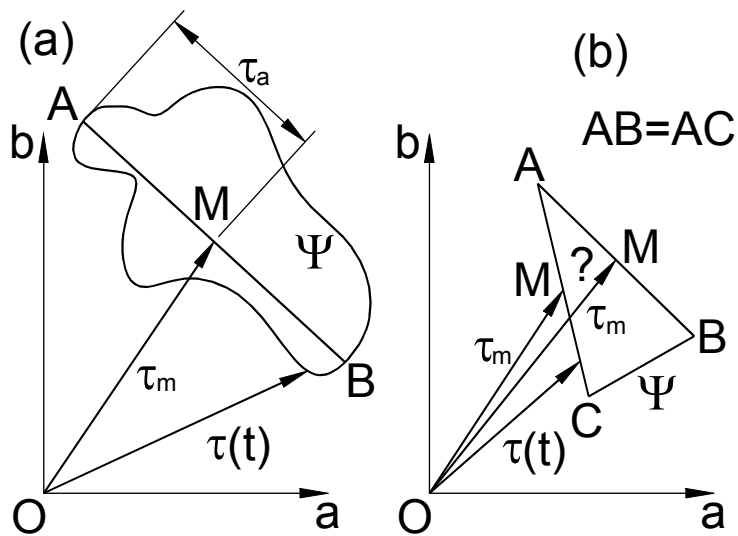


Figura 2.4: Metodo della corda.

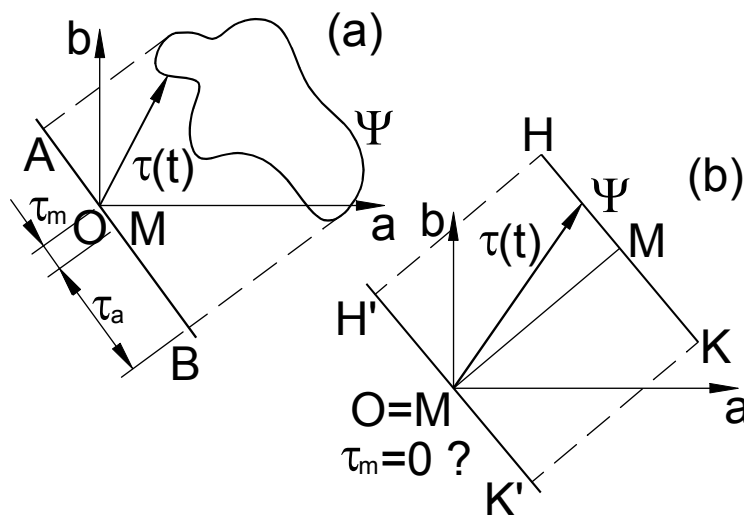


Figura 2.5: Metodo della proiezione.

#### 2.4.1. Il metodo della corda

Il metodo della corda [5] si basa sull'individuazione del segmento di massima lunghezza avente come estremi due punti della spezzata  $\Psi'$ : l'ampiezza della tensione tangenziale è pari alla semilunghezza della massima corda, mentre il valore medio è dato dal modulo del vettore che unisce l'origine del sistema di riferimento con il punto medio della massima corda (fig. 2.4a).

In base alle definizioni proposte l'ampiezza della tensione tangenziale agente su un piano  $\Delta$  per una data storia di carico di durata  $T$  può essere calcolata risolvendo un semplice problema di massimo-minimo, ovvero:

$$\tau_a = \frac{1}{2} \max_{t_1 \in T} \left[ \max_{t_2 \in T} |\tau(t_1) - \tau(t_2)| \right] \quad (2.16)$$

Una metodologia di questo tipo cade in difetto, però, tutte le volte che è possibile definire più corde tutte di valore massimo: se, ad esempio, la curva  $\Psi$  tracciata dal vettore tensione tangenziale è un triangolo isoscele le corde di massima lunghezza sono due, AB e AC (fig. 2.4b), e pertanto la tensione tangenziale media non può più essere definita in modo univoco.

#### 2.4.2. Il metodo della proiezione

Il metodo proposto da Grubisic e Simbürger [6] si basa sull'individuazione della retta passante per l'origine su cui risulta essere massima la proiezione della curva  $\Psi$ . Si supponga di aver individuato tale retta e che la proiezione di  $\Psi$  su di essa sia data dal segmento AB (2.5a), allora l'ampiezza della tensione tangenziale risulta pari alla semilunghezza del segmento AB, mentre il valore medio è dato dalla distanza tra l'origine del sistema di riferimento e il punto medio del segmento AB.

Anche questa metodologia presenta rischi di soluzioni ambigue: se si ipotizza, ad esempio, che il vertice del vettore tensione tangenziale percorra ciclicamente un segmento HK traslato rispetto all'origine e avente normale al punto medio passante per l'origine (fig. 2.5b), allora, secondo il metodo della proiezione, si calcola un valore medio della tensione tangenziale nullo, anche se il modulo del vettore  $\tau(t)$  risulta sempre diverso da zero. Pertanto il problema principale di questa metodologia risiede nel fatto che il valore medio viene calcolato praticamente in modo indipendente dalla posizione della curva  $\Psi$  nel piano  $\Delta$ .

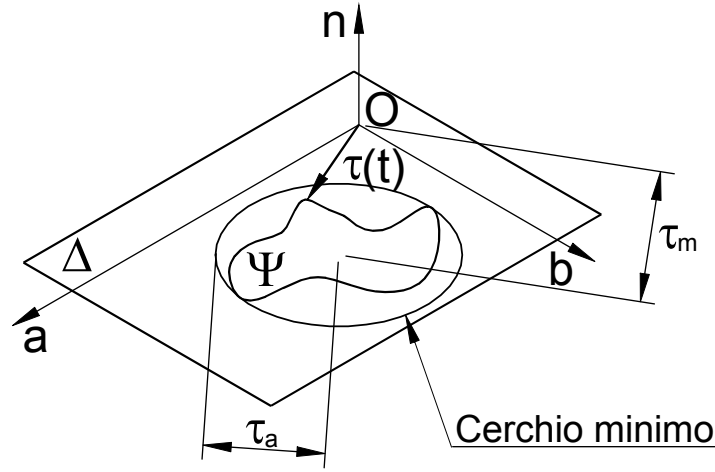
#### 2.4.3. Il metodo della più piccola ipersfera

Il metodo della più piccola ipersfera proposto da Papadopoulos [3] permette di superare le incongruenze messe in evidenza nei paragrafi precedenti, con l'inconveniente, però, di aumentare notevolmente le difficoltà nella soluzione del problema.

Secondo Papadopoulos l'ampiezza della tensione tangenziale agente su un generico piano  $\Delta$  di normale  $\mathbf{n}$  è pari al raggio della più piccola circonferenza che contiene interamente la curva  $\Psi$ , mentre il valore medio della tensione tangenziale è pari alla distanza del centro di tale circonferenza dall'origine del sistema di riferimento (fig. 2.6). In base al teorema di Karatheodory [6] è possibile dimostrare che nel caso di una qualsiasi curva chiusa in  $\mathcal{R}^n$ , schematizzata con un iperpoligono avente  $k$  vertici, la più piccola ipersfera che contiene tale curva esiste sempre ed è unica.

In questo paragrafo si preferisce, però, sviluppare unicamente l'algoritmo di calcolo nel caso di uno spazio euclideo a due dimensioni ( $n=2$ ), ovvero nella dimensione che specificatamente viene richiesta dal problema in esame. Si consideri allora un generico piano  $\Delta$  e su di esso si fissi il sistema di riferimento  $Oab$ ; secondo quanto discusso nel paragrafo 2.3 si suddivida la storia di carico di durata  $T$  in  $k$  istanti, e per ciascuno degli istanti considerati si siano determinati, tramite le (2.12) e (2.13), i valori delle componenti  $\tau_{na}(t)$  e  $\tau_{nb}(t)$ ; tramite le grandezze ora definite è possibile individuare nella

giacitura  $\Delta$  in modo univoco un punto P e poiché, per ipotesi, la storia di carico è stata suddivisa in k istanti, i punti di tipo P sono proprio in numero pari a k.



**Figura 2.6:** Metodo della più piccola ipersfera (caso piano).

Si fissino due istanti  $t_1$  e  $t_2$  e si determinino i corrispondenti punti  $P_1$  e  $P_2$  di coordinate:

$$P_1 \equiv [\tau_{na}(t_1), \tau_{nb}(t_1)] \text{ con } t_1 \in T$$

$$P_2 \equiv [\tau_{na}(t_2), \tau_{nb}(t_2)] \text{ con } t_2 \in T \text{ e } t_2 \neq t_1$$

Si possono ora calcolare tutte le  $n_D$  circonferenze passanti per due punti (del tipo  $P_1$  e  $P_2$ ) ed aventi diametro proprio pari alla distanza tra i due punti in esame. Il numero di circonferenze che possono essere determinate è pari a:

$$n_D = \frac{k!}{2!(k-2)!}$$

Pertanto le  $n_D$  circonferenze hanno raggio  $R$  e centro  $C \equiv (C_a, C_b)$  pari rispettivamente a:

$$C_a = \frac{\tau_{na}(t_1) + \tau_{na}(t_2)}{2}$$

$$C_b = \frac{\tau_{nb}(t_1) + \tau_{nb}(t_2)}{2}.$$
(2.17)

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{[\tau_{na}(t_1) - \tau_{na}(t_2)]^2 + [\tau_{nb}(t_1) - \tau_{nb}(t_2)]^2}$$
(2.18)

Si possono ora costruire tutte le  $n_T$  circonferenze, con  $n_T$  pari a:

$$n_T = \frac{k!}{3!(k-3)!},$$



passanti per tre punti,  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ , della curva  $\Psi$ , ove:

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv [\tau_{na}(t_1), \tau_{nb}(t_1)] \text{ con } t_1 \in T \\ P_2 &\equiv [\tau_{na}(t_2), \tau_{nb}(t_2)] \text{ con } t_2 \in T \text{ e } t_2 \neq t_1 \\ P_3 &\equiv [\tau_{na}(t_3), \tau_{nb}(t_3)] \text{ con } t_3 \in T \text{ e } t_3 \neq t_2 \neq t_1 \end{aligned}$$

Per determinare, allora, il raggio  $R$  e il centro  $C \equiv (C_a, C_b)$  di ciascuna delle  $n_T$  circonferenze si deve risolvere un semplice sistema di tre equazioni in tre incognite, ovvero:

$$\begin{cases} R^2 = [C_a - \tau_{na}(t_1)]^2 - [C_b - \tau_{nb}(t_1)]^2 \\ R^2 = [C_a - \tau_{na}(t_2)]^2 - [C_b - \tau_{nb}(t_2)]^2 \\ R^2 = [C_a - \tau_{na}(t_3)]^2 - [C_b - \tau_{nb}(t_3)]^2 \end{cases} \quad (2.19)$$

Tra le  $n_D + n_T$  circonferenze individuate si devono adesso scartare tutte quelle che non contengono interamente la curva  $\Psi$ , ovvero che non contengono tutti i  $k$  vertici della pligonale con cui la curva  $\Psi$  stessa è stata approssimata.

Si è così costruita una famiglia di circonferenze contenenti tutte la curva  $\Psi$  e tra queste si deve estrarre quella avente raggio più piccolo; supponendo che tale circonferenza abbia raggio  $R_{\min}$  e centro  $C_{\min} \equiv (C_{a,\min}, C_{b,\min})$  allora l'ampiezza e il valore medio della tensione tangenziale agente su un piano secondo quanto proposto da Papadopoulos possono essere calcolati come:

$$\tau_a = R_{\min} \quad (2.20)$$

$$\tau_m = \sqrt{C_{a,\min}^2 + C_{b,\min}^2} \quad (2.21)$$

#### 2.4.4. Considerazioni critiche sulle definizioni

La definizioni proposte vengono solitamente utilizzate per eseguire una progettazione a fatica per vita infinita e quindi, per lavorare in condizioni conservative, definiscono ampiezza e valore medio della tensione tangenziale in relazione al ciclo più danneggiante ipotizzando, di fatto, che tale ciclo si ripeta per  $N_\infty$  volte, indipendentemente dal reale andamento della storia di carico. Volendo fare una similitudine utilizzare tali definizioni equivale a progettare ad ampiezza variabile, nel campo del monoassiale, non con la curva di Gassner ma con la curva di Wöhler facendo riferimento al ciclo di ampiezza maggiore.

In più tutte le definizioni proposte presentano l'inconveniente di non dare un'interpretazione fisica evidente al problema. In particolare viene di fatto definita prima l'ampiezza della tensione tangenziale e solo successivamente viene calcolato il valore medio.

Operando in questo modo, però, non sempre si riesce a trovare un'univoca correlazione con la storia di carico. Per chiarire meglio quanto poc'anzi affermato si schematizzi la curva  $\Psi$  con  $k$  punti e si traccino nel piano  $\Delta$  solo i vertici della pligonale  $\Psi'$  (fig. 2.7). Si ipotizzi poi che il vettore tensione tangenziale  $\tau$  allo scorrere della storia di carico si

mantenga in una zona ben circoscritta e che solo per alcuni istanti il vettore si sposti da tale zona. Applicando, ad esempio, la metodologia della più piccola ipersfera si ha che i pochi punti che si allontanano dalla zona di maggior densità influenzano in maniera determinante la definizione di ampiezza e valore medio della tensione tangenziale, ovvero pochi punti dispersi pesano molto di più di una molteplicità di punti concentrati in una zona ristretta.

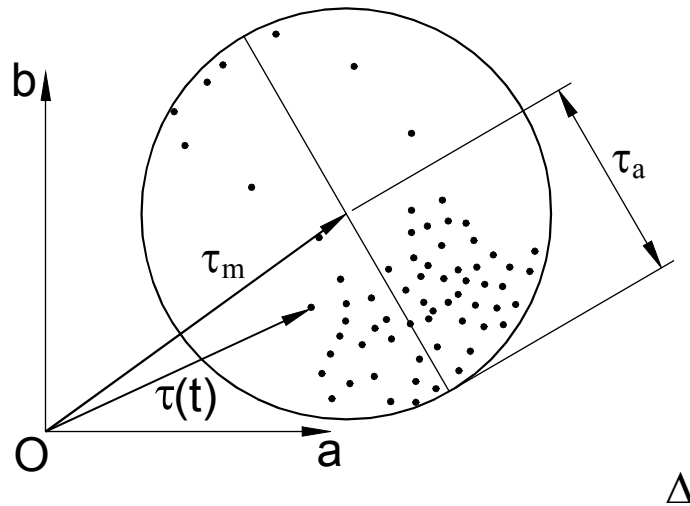


Figura 2.7: Storia di carico particolare nel piano  $\Delta$ .

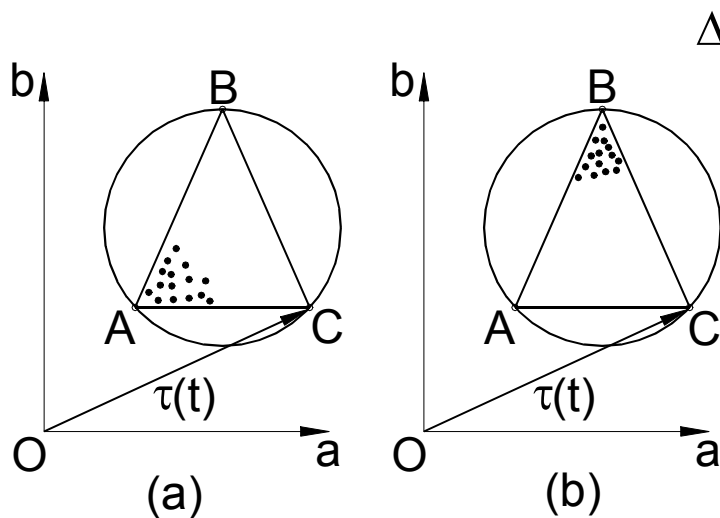


Figura 2.8: Storie di carico sul piano  $\Delta$  contenute in un triangolo.

Un situazione di questo tipo può portare, in alcuni casi, a definire le grandezze in gioco in maniera praticamente indipendente dal reale andamento della storia di carico. Per chiarire meglio quanto appena affermato si consideri la figura 2.8 e si applichi ai due casi in esame il metodo della più piccola ipersfera. Nei due casi rappresentati i punti

ABC sono quelli che permettono di determinare la circonferenza di minimo raggio che contiene interamente la storia di carico. In una situazione di questo tipo il calcolo della  $\tau_a$  e della  $\tau_m$  non sono influenzate in nessun modo dal fatto che il vettore tensione tangenziale permanga in prossimità del vertice A (fig. 2.8a) o permanga nelle vicinanze del vertice B (fig. 2.8b).

Il problema evidenziato ora, con riferimento al metodo di Papadopoulos, in realtà è comune a tutte le metodologie prese in esame e pertanto non si riesce a trovare quasi mai nelle definizioni una univoca corrispondenza al fenomeno fisico.

## 2.5. Ampiezza e valore medio della tensione normale al piano $\Delta$

Si consideri un piano  $\Delta$  e si analizzi l'andamento allo scorrere della storia di carico di durata  $T$  della tensione  $\sigma_n$  normale al piano in esame e calcolabile tramite la (2.11). Il vettore  $\sigma_n(t)$  nel tempo varierà solo in modulo e, al più, in direzione, poiché il verso resterà sempre costante e coincidente con quello del versore  $\mathbf{n}$ .

L'ampiezza e il valore medio della grandezza in esame possono allora essere calcolati risolvendo un semplice problema di massimo e minimo, ovvero [7]:

$$\sigma_{n,a} = \frac{1}{2} \left[ \max_{t_1 \in T} \sigma_n(t_1) - \min_{t_2 \in T} \sigma_n(t_2) \right] \quad (2.22)$$

$$\sigma_{n,m} = \frac{1}{2} \left[ \max_{t_1 \in T} \sigma_n(t_1) + \min_{t_1 \in T} \sigma_n(t_1) \right]. \quad (2.23)$$

Il valore massimo della tensione normale  $\sigma_{n,max}$  è dato, infine, dalla somma del suo valore medio e della sua ampiezza:

$$\sigma_{n,max} = \sigma_{n,a} + \sigma_{n,m}. \quad (2.24)$$

## 2.6. Tensione idrostatica

Si consideri ancora per semplicità il componente di figura 2.1 e lo si solleghi con una storia di carico di durata  $T$ ; in un generico istante  $t$  ( $t \in T$ ) e nel punto  $O$ , punto ritenuto pericoloso per la resistenza a fatica nonché origine del sistema di riferimento assoluto, la tensione idrostatica  $\sigma_H(t)$  risulta pari a [1]:

$$\sigma_H(t) = \frac{1}{3} \cdot \text{tr}([\sigma(t)]) = \frac{1}{3} \cdot [\sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t)] \quad (2.25)$$

o in termini matriciali:

$$[\sigma_H(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_H(t) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_H(t) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_H(t) \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

L'ampiezza e il valore medio possono allora essere calcolati come:

$$\sigma_{H,m} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t_1 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_1)])}{3} + \min_{t_2 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_2)])}{3} \right\} \quad (2.27)$$

$$\sigma_{H,a} = \frac{1}{2} \left\{ \max_{t_1 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_1)])}{3} - \min_{t_2 \in T} \frac{\text{tr}([\sigma(t_2)])}{3} \right\}, \quad (2.28)$$

mentre il valore massimo può essere semplicemente calcolato come somma dell'ampiezza e del valore medio:

$$\sigma_{H,max} = \sigma_{H,m} + \sigma_{H,a}. \quad (2.29)$$

## 2.7. Secondo invariante del tensore deviatorico

Il tensore degli sforzi, dato dalla (2.1), può essere espresso come la somma del tensore idrostatico (2.26) e del tensore *deviatorico* [1]:

$$[\sigma(t)] = [\sigma_H(t)] + [\sigma_D(t)], \quad (2.30)$$

ovvero il tensore deviatorico può essere determinato come differenza tra il tensore degli sforzi e il tensore idrostatico:

$$[\sigma_D(t)] = [\sigma(t)] - [\sigma_H(t)], \quad (2.31)$$

Dalla (2.31), e ricordando le (2.1) e (2.26), segue che:

$$[\sigma_D(t)] = \begin{bmatrix} \sigma_x(t) - \sigma_H(t) & \tau_{xy}(t) & \tau_{xz}(t) \\ \tau_{xy}(t) & \sigma_y(t) - \sigma_H(t) & \tau_{yz}(t) \\ \tau_{xz}(t) & \tau_{yz}(t) & \sigma_z(t) - \sigma_H(t) \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Come per il tensore degli sforzi (2.1) anche per il tensore deviatorico (2.32) possono essere definiti tre invarianti di tensione [1]; in particolare la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, grandezza, questa ultima, molto utilizzata dai criteri classici di progettazione a fatica multiassiale, può essere calcolata, nota la (2.32), come:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} [\sigma_D(t)] \cdot [\sigma_D(t)]}. \quad (2.33)$$

La radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, come evidenziato nella (2.35), si presenta come una grandezza variabile nel tempo (chiaramente in funzione della storia di carico) e pertanto anche per essa è possibile definire un'ampiezza e un valore medio. Per rendere più agevole però il calcolo è utile osservare come la (2.33) possa essere anche espressa come [2]:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{S_1^2(t) + S_2^2(t) + S_3^2(t) + S_4^2(t) + S_5^2(t)} \quad (2.34)$$

dove

$$\begin{aligned} S_1(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} [\sigma_x(t) - \sigma_H(t)] \\ S_2(t) &= \frac{1}{2} [\sigma_y(t) - \sigma_z(t)] \\ S_3(t) &= \tau_{xy}(t) \\ S_4(t) &= \tau_{xz}(t) \\ S_5(t) &= \tau_{yz}(t) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dalla relazione (2.34) si può, con immediatezza, constatare come la radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico sia pari al modulo del vettore  $\mathbf{S}(t) \in \mathcal{R}^5$ , variabile nel tempo, di componenti:

$$\mathbf{S}(t) \equiv [S_1(t), S_2(t), S_3(t), S_4(t), S_5(t)]. \quad (2.36)$$

Per calcolare allora l'ampiezza e il valore medio del secondo invariante del tensore deviatorico si può ricorrere all'utilizzo delle metodologie viste nei paragrafi precedenti, e in particolare è possibile utilizzare sia il metodo della corda sia il metodo della più piccola ipersfera, e tutto con modalità di applicazione analoghe a quelle utilizzate per determinare l'ampiezza e il valore medio del vettore tensione tangenziale agente su di un piano.

Le analisi in questo caso, però, si complicano notevolmente poiché si passa da una trattazione in  $\mathcal{R}^2$  ad una trattazione in  $\mathcal{R}^5$ , ma le complicazioni risultano essere solo di tipo analitico e non concettuale.

### 2.7.1. Calcolo della ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico

I criteri classici di progettazione a fatica multiassiale sono basati sul calcolo della ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico, unitamente all'uso della tensione idrostatica.

Come accennato alla fine del paragrafo precedente, introducendo la notazione vettoriale per esprimere il valore istantaneo di  $\sqrt{J_2(t)}$ , il calcolo di ampiezza e valore medio di tale grandezza richiede di affrontare un problema in uno spazio a 5 dimensioni.

Utilizzando, però, per il calcolo dell'ampiezza del secondo invariante del tensore deviatorico,  $\sqrt{J_{2,a}(t)}$ , il metodo della corda il problema può essere notevolmente semplificato. In particolare si può immaginare che allo scorrere della storia di carico il vertice del vettore  $S(t)$ , dato dalla (2.36), tracci in uno spazio a cinque dimensioni una ipercurva avente tanti vertici quanti sono gli istanti  $k$  in cui è stata suddivisa la storia di carico. Se si considerano due istanti,  $t_i$  e  $t_j$ , della storia di carico in esame i vettori associati a tali istanti possono essere espressi come:

$$S(t_i) \equiv [S_1(t_i), S_2(t_i), S_3(t_i), S_4(t_i), S_5(t_i)]$$

$$S(t_j) \equiv [S_1(t_j), S_2(t_j), S_3(t_j), S_4(t_j), S_5(t_j)]$$

La distanza tra gli estremi di tali vettori è data dalla relazione:

$$D = \sqrt{\sum_{m=1}^5 [S_m(t_i) - S_m(t_j)]^2} \quad (2.37)$$

Se la storia di carico ha un periodo  $T$  allora l'applicazione del metodo della corda richiede di individuare i due istanti  $t_i$  e  $t_j$  (istanti interni alla finestra temporale di osservazione avente ampiezza  $T$ ) capaci di massimizzare il valore di  $D$ . Detto, allora,  $D_{\max}$  il massimo valore trovato per  $D$ , l'ampiezza della radice quadrata del secondo invariante del tensore deviatorico può essere calcolata come:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \frac{D_{\max}}{2}.$$

## 2.8 Tensioni principali variabili nel tempo

Risolvendo un classico problema agli autovalori [1] è possibile determinare per ogni istante  $t$  della storia di carico, a partire dal tensore (2.1), le direzioni principali, nonché le tensioni principali.

Nella pratica tecnica è consuetudine riordinare le componenti principali di tensione in modo che:

$$\sigma_1(t) > \sigma_2(t) > \sigma_3(t). \quad (2.38)$$

Premesso tutto ciò, l'ampiezza e il valore medio possono essere calcolati come (per  $i=1,2,3$ ):

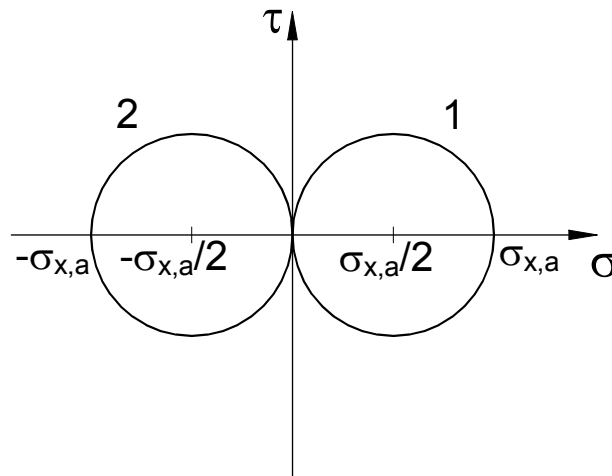
$$\begin{aligned} \sigma_{i,a} &= \frac{1}{2} \left[ \max_{t_1 \in T} \sigma_i(t_1) - \max_{t_2 \in T} \sigma_i(t_2) \right] \\ \sigma_{i,m} &= \frac{1}{2} \left[ \max_{t_1 \in T} \sigma_i(t_1) + \max_{t_2 \in T} \sigma_i(t_2) \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

mentre il valore massimo risulta, al solito, pari a:

$$\sigma_{i,\max} = \sigma_{i,a} + \sigma_{i,m} \quad \text{per } i=1,2,3 \quad (2.40)$$

Le definizioni ora presentate devono però essere interpretate in modo opportuno ed utilizzate con cautela. Per comprendere meglio quanto poc'anzi affermato si consideri il componente di figura 2.1 e lo si solleciti con un carico di trazione-compressione ad ampiezza costante ( $\sigma_{x,a}=\text{cost.}$ ,  $R=-1$ ). Nella figura 2.9 vengono riportati, a titolo esemplificativo, i cerchi di Mohr relativi alle condizioni di massima trazione (cerchio 1) e di massima compressione (cerchio 2). Per questa tipologia di carico applicando le (2.39) si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,a} &= \frac{\sigma_{x,a}}{2}; \sigma_{1,m} = \frac{\sigma_{x,a}}{2} \\ \sigma_{2,a} &= 0; \sigma_{2,m} = 0 \\ \sigma_{3,a} &= \frac{-\sigma_{x,a}}{2}; \sigma_{3,m} = \frac{-\sigma_{x,a}}{2} \end{aligned} \quad (2.41)$$



**Figura 2.9:** Cerchi di Mohr per una sollecitazione ciclica monoassiale ( $R=-1$ ).

Dalle (2.41) si comprende come pur restando il carico sempre monoassiale in realtà proprio perché istante per istante viene applicata la condizione (2.38) si trovano valori medi e ampiezze diverse da zero per due delle tre tensioni principali.

In un caso di sollecitazione a fatica multiassiale il problema resta analogo a quello appena evidenziato e questo sia nel caso di direzioni principali fisse nel tempo sia nel caso di direzioni principali variabili nel tempo. In particolare nel caso di direzioni principali fisse nel tempo non è detto che lungo una certa direzione si abbia sempre la stessa componente principale di tensione.

In conclusione possiamo affermare che generalmente le (2.39) e (2.40) eseguono, istante per istante, un calcolo basato sul modulo delle tensioni principali e pertanto non possono dare alcuna informazione relativamente alla loro direzione di applicazione.

## Bibliografia

- [1] **E. Viola** – *Scienza delle costruzioni 1. Teoria dell'elasticità*. Pitagora Editrice Bologna, 1992.
- [2] **I. V. Papadopoulos** - *A review of multiaxial fatigue limit criteria*. Dispense del corso CISM, Udine, 1997.
- [3] **I. V. Papadopoulos** – *Critical Plane Approaches in High-Cycle Fatigue: on the Definition of the Amplitude and Mean Value of the Shear Stress Acting on the Critical Plane*. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, No 21, pp. 269-285, 1998.
- [4] **J. Lemaitre, J. L. Chaboche** – *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [5] **V. Grubisic, A. Simbürger** – *Fatigue under combined out of phase multiaxial stresses*. Proc. Int. Conf. on Fatigue Testing and Design, Society of Environmental Engineers, London, pp. 27.1 – 27.8, 1976.
- [6] **I. V. Papadopoulos** – *Fatigue polycyclique des metaux une nouvelle approche*. Tesi di dottorato presentata il 18 dicembre 1987 a “L'Ecole Nationale des Ponts et Chaussees”.